Topology Vol. 10, pp. 5–8. Pergamon Press, 1971. Printed in Great Britain.

PROJEKTIVE LIMITES KOMPAKTER RÄUME

HELMUT POMMER

(*Received* 14 *August* 1969)

§0. EINLEITUNG

SEI $\mathfrak{G}$ BZW. $\mathfrak{L}$ die Kategorie aller kompakten Gruppen bzw. kompakten Liegruppen und stetigen, surjektiven Homomorphismen. Jedem Objekt X von $\mathfrak{L}$ werde die Menge X^S aller abgeschlossenen Subnormalteiler von X zugeordnet. S besitzt zwei verschiedene Fortsetzungen auf $\mathfrak{G}$: erstens die Abbildung, die jedem $X \in \mathfrak{G}$ die Menge aller abgeschlossenen Subnormalteiler von X zuordnet und zweitens die Abbildung T, die jedem $X \in \mathfrak{G}$ die Menge X^T aller topologisch subnormalen Untergruppen von X zuordnet. S bzw. T lassen sich als Funktoren von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{G}$ in die Kategorie $\mathfrak{K}$ aller nicht leeren kompakten Räume und stetigen Abbildungen auffassen. Mit Hilfe allgemeiner Methoden aus der Theorie der kompakten Räume zeigen wir, daß T projektive Limites erhält. Da jede kompakte Gruppe projektiver Limes kompakter Liegruppen ist, ist T die einzige Fortsetzung von S mit dieser Eigenschaft.

§1. TOPOLOGISCH SUBNORMALE UNTERGRUPPEN

Eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe X heißt topologisch subnormal, wenn es eine von X nach H absteigende Kette $X = H_0 \geqslant H_1 \geqslant$ abgeschlossener Untergruppen H_α gibt derart, daß gilt:

$$H_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} H_\beta \text{, falls } \alpha \text{ Limeszahl ist.} \tag{1}$$

$$H_\alpha \lessdot H_{\alpha-1} \text{, falls } \alpha \text{ keine Limeszahl ist} \tag{2}$$

In [3] wird folgender Satz bewiesen: In jeder topologischen Gruppe X mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe bildet die Menge aller topologisch subnormalen Untergruppen einen vollständigen Teilverband des Verbandes der abgeschlossenen Untergruppen; wenn X kompakt ist, dann normalisiert die Zussammenhangskomponente von $1 \in X$ jede topologisch subnormale Untergruppe von X. Da kompakte Liegruppen die Minimalbedingung für abgeschlossene Untergruppen erfüllen, gilt für alle $X \in \mathfrak{L} : X^T = X^S$. *Sei* $X \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von $1 \in X$, $H \in X^A := \{M \mid \phi \neq M \subseteq X,\ M$ abgeschlossen$\}$. Für $U \in \mathfrak{U}$ setze $\tilde{U}_H := \{M \in X^A \mid M \subseteq UH$ und $H \subseteq UM\}$. Wählt man für jedes $H \in X^A$ die Menge $\{\tilde{U}_H \mid U \in \mathfrak{U}\}$ als Umgebungsbasis von H, dann wird X^A ein topologischer Raum.

SATZ 1. *Sei* $\mathfrak{V}$ *ein vollständiger Teilverband des Verbandes aller abgeschlossener Untergruppen einer kompakten Gruppe* X *derart, daß die Komponente* X_0 *von* $1 \in X$ *jedes Element von* $\mathfrak{V}$ *normalisiert. Dann ist* $\mathfrak{V}$ *abgeschlossen in* X^A.

Beweis. Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von $1 \in X$, $H \in \overline{\mathfrak{B}}$. Dann gibt es für alle $U \in \mathfrak{U}$ ein $H_U \in \mathfrak{B}$ so, daß $H \subseteq UH_U$ und $H_U \subseteq UH$ ist. Sei $a, b \in H$. Es gibt wegen $H \subseteq UH_U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ Elemente $u, u' \in U$ und $t, t' \in H_U$ mit $a = u't'$ und $b = ut$. Dann gilt: $ab^{-1} = u't't^{-1}u^{-1} \in UH_U U^{-1}$. Wegen $H \subseteq \bigcap_{\mathfrak{U}} UH_U U^{-1} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{U}} U^2HU^{-1} = \bar{H} = H$ ist $ab^{-1} \in H$. Also ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G.

(1) Sei $f: X \to Y$ ein stetiger Homomorphismus von X auf eine Liegruppe Y, $W \subseteq X_0 f$ eine Umgebung des Einselementes von Y ($X_0 f$ ist als Komponente des Einselementes einer Liegruppe offen). Nach [2, p. 216] gibt es eine offene Menge $O \supseteq Hf$ von Y mit der Eigenschaft: für jede kompakte, Untergruppe F von Y mit $F \subseteq 0$ existiert ein $z \in W$ so, daß $z^{-1}Fz = F^z \leq Hf$ ist. Wegen der Kompaktheit von H gibt es ein $U_f \in \mathfrak{U}$ mit $(U_f H)f \subseteq 0$. Daher existiert für alle $U \in \mathfrak{U}_f = \{U \in \mathfrak{U} \mid U \subseteq U_f\}$ ein $z_U \in W$ derart, daß

$$((H_U)f)^{z_U} \leqslant Hf \text{ ist.}$$

Aus der Voraussetzung, daß $\overline{X_0}$ alle Elemente von $\mathfrak{B}$ normalisiert, folgt: $(H_U)f \leqslant Hf$ für alle $U \in \mathfrak{U}_f$. Setze $E_f = \overline{gp\{H_U \mid U \in \mathfrak{U}_f\}}$. Dann gilt $(E_f)f \leq Hf$, und wegen $H \subseteq \bigcap_{\mathfrak{U}_f} UH_U \subseteq \bigcap_{\mathfrak{U}_f} UE_f = E_f$ ist $H \leqslant E_f$, also $Hf = (E_f)f$.

(2) Da X kompakt ist, gib tes nach [2, p. 99] für alle $U \in \mathfrak{U}$ einen abgeschlossenen Normalteiler N_U von X so, daß X/N_U eine Liegruppe ist. Nach (1) gibt es daher zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $E_U \in \mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften : $H \leqslant E_U$ und $HN_U = E_U N_U$. Setze $E = \bigcap E_U$. Es gilt dann:

$$E \geqslant H = \bigcap_{\mathfrak{U}} HN_U = \bigcap_{\mathfrak{U}} E_U N_U \geqslant \bigcap_{\mathfrak{U}} EN_U = E, \text{ also } H = E. \text{ Darus folgt } H \in \mathfrak{B}.$$

KOROLLAR. *X^T ist abgeschlossen in X^A für alle $X \in \mathfrak{G}$.*

§2. n-STUFIGE FUNKTOREN

Sei $X \neq \phi$ ein kompakter Raum, also $X \in \mathscr{K}$, und $\mathfrak{B}$ die zu der Topologie von X gehörige uniforme Struktur. Für alle $V \in \mathfrak{B}$ und $M \subseteq X$ setze $V_M = \{x \in X \mid$ es gibt ein $m \in M$ mit $(x, m) \in V\}$. Entsprechend wie oben erklären wir auf der Menge X^A aller nicht leeren, abgeschlossenen Teilmengen von X eine Topologie, indem wir für alle $H \in X^A$ die Gesamtheit aller $\tilde{V}_H = \{M \in X^A \mid H \subseteq V_M$ und $M \subseteq V_H\}$ ($V \in \mathfrak{B}$) als Umgebungsbasis von H wählen. Nach [1] p. 158 und p. 232 ist diese Topologie kompakt; für kompakte Gruppen fällt sie mit der in dem vorangehenden Abschnitt angegebenen zusammen. Sei $\rho : X \to Y$ ein Morphismus von $\mathfrak{K}$. Dann ist $\rho^A = (H \to H\rho) : X^A \to Y^A$ nach [1, p. 138] ein Morphismus von $\mathfrak{K}$. Man zeigt leicht, daß A ein kovarianter Funktor von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}$ ist. Dies ermöglicht es, höhere Potenzen A^n von A zu betrachten ($n \geqslant 0$; $A^o = 1$).

Definition. Sei $\mathfrak{T}$ eine Unterkategorie von $\mathfrak{K}$. Ein Funktor $S : \mathfrak{T} \to \mathfrak{K}$ heißt ein *n-stufiger Funktor von* $\mathfrak{T}$, wenn ρ^S die Einschränkung von ρ^{A^n} auf X^S ist für jeden Morphismus $\rho : X \to Y$ von $\mathfrak{T}$.

Beispiele. (1) A^n ist ein n-stufiger Funktor von $\mathfrak{K}$ für alle ($n \geqslant 0$. 2) Sei $\rho : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{G}$; die Abbildung $\rho^S = (H \to H\rho) : X^S \to Y^S$ bzw. $\rho^T = (H \to H\rho) : X^T \to Y^T$ ist wohldefiniert und stetig. Als abgeschlossene Teilmenge von X^A ist X^S bzw. X^T kompakt. Daher ist S bzw. T ein 1-stufiger Funktor von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{G}$($\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{G}$ seien durch einen Vergeßfunktor in $\mathfrak{K}$ eingebettet). Es ist nicht schwer, in der Theorie der endlichen, diskreten Gruppen weitere Beispiele 1-oder 2-stufiger Funktoren zu finden.

Sei $\mathfrak{T}$ eine Unterkategorie von $\mathfrak{K}$, $D = (\{D_i \mid i \in I\}, \{\pi_{ij} : D_j \mid i \leqslant j\})$ ein projektives System in $\mathfrak{T}$ über der Indexmenge I. $D^L = \varprojlim_{i \in I} D_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} D_i \mid$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ist $x_j\, \pi_{ij} = x_i\}$ ist nach [1, p. 100] eine nicht leere, abgeschlossene Teilmenge des topologischen Produktes $\prod_{i \in I} D_i$ der Räume D_i, also ist $D^L \in \mathfrak{K}$. π_i sei die i-te Projektion von D^L nach D_i. Wenn $S : \mathfrak{T} \to \mathfrak{K}$ ein kovarianter Funktor ist, dann ist $D^S = (\{D_i^S \mid i \in I\}, \{(\pi_{ij})^S \mid i \leqslant j\})$ ein projektives System in $\mathfrak{K}$ über I; $\alpha_i : D^{SL} \to D_i^S$ sei die i-te Projektion.

LEMMA 2. *Unter Beibehaltungder obigen Bezeichnungen sei:* $D^L \in \mathfrak{T}$, $Y \subseteq D^{LS}$ *abgeschlossen,* $a \in D^{SL}$, $Q_i = a\, \alpha_i(\pi_i^S)^{-1}$ *und* $Q_i \cap Y \neq \phi$ *für alle* $i \in I$. *Dann ist* $\bigcap_{i \in I} Q_i \cap Y \neq \phi$.

Beweis. $Q_i \cap Y$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von D^{LS}. Da I gerichtet ist, ist der Durchschnitt endlich vieler $Q_i \cap Y$ nicht leer. Wegen der Kompaktheit von D^{LS} folgt daraus die Behauptung.

SATZ 3. *Sei S ein n-stufiger Funktor einer Unterkategorie $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{K}$. Dann erhält S projektive Limites.*

Beweis. Sei mit den Bezeichnungen von oben $D^L \in \mathfrak{T}$. Wir müssen zeigen, daß es in $\mathfrak{K}$ einen Isomorphismus $\delta : D^{SL} \to D^{LS}$ gibt. Sei $a \in D^{SL}$. Nach Lemma 2 ist der Durchchnitt Q aller Mengen Q_i nicht leer. Für zwei Elemente X und Y aus Q gilt nach der Voraussetzung über S: $X\pi_i^{A^n} = Y\pi_i^{A^n}$. Wenn $n = 0$ ist, folgt daraus $X = Y$, also $|Q| = 1$. Für $n > 0$ fasse man X und Y als abgeschlossene Teilmengen von $D^{LA^{n-1}}$ auf; zur Abkürzung sei $A^{n-1} = B$ gesetzt. Dann ist $X\pi_i^B = Y\pi_i^B$. Für $x \in X$ ist daher nach Lemma 2 $\bigcap_{i \in I} x\pi_i^B(\pi_i^B)^{-1} \cap Y \neq \phi$, und nach Induktion gilt: $\bigcap_{i \in I} x\pi_i^B(\pi_j^B)^{-1} = \{x\}$. Daraus folgt $x \in Y$. Also ist $X \subseteq Y$, und aus Symmetriegründen ist $Y \subseteq X$. Daher ist die Abbildung

$$\delta = (x \to \bigcap_{i \in I} x\alpha_i(\pi_i^S)^{-1}) : D^{SL} \to D^{LS}$$

wohldefiniert. Nach der Konstuktion von δ ist klar, daß für alle $i \in I$ gilt:

$$\delta\pi_i^S = \alpha_i .$$

Daraus folgt, daß δ injektiv ist. Sei $x \in D^{LS}$. Dann ist $(x\pi_i^S)_{i \in I} \in D^{SL}$ und $(x\pi_i^S)_{i \in I}\, \delta = x$, also ist δ surjektiv. Sei Y eine abgeschlossene Teilmenge von D^{LS}, $Y_i = Y\pi_i^S$, $Y' = \varprojlim Y_i$. Aus Lemma 2 folgt $Y' \subseteq Y\delta^{-1}$. Wenn umgekehrt $x \in Y\delta^{-1}$, also $x\delta \in Y$ gilt, dann ist

$x\delta\pi_i^S \in Y_i$. Wegen $\delta\pi_i^S = \alpha_i$ folgt $x \in Y'$. Also ist $Y' = Y\delta^{-1}$. Da Y' abgeschlossen in D^{SL} ist, folgt daraus die Stetigkeit von δ; und wegen der Kompaktheit von D^{SL} ist dann auch δ^{-1} stetig.

KOROLLAR. *Der Funktor T erhält projektive Limites.*

LITERATUR

1. N. BOURBAKI: *Topologie Générale*, Ch. 1, 4, ème édition, Paris (1965).
2. D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN: *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers, New York (1964).
3. H. POMMER: Subnormalität in topologischen Gruppen, *Math. Z.* **114** (1970) 194–200.

Mathematisches Institut
Universität Tübingen
W. Germany